2) Να λυθεί η εξίσωση

$7x^2+28x \equiv 0 \bmod 45$

ΛΥΣΗ

$(7,45)=1$

$7(x^2+4x+4) \equiv 7\cdot 4 \bmod 45 \Rightarrow 7(x+2)^2 \equiv 7\cdot 4 \bmod 45 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+2)^2 \equiv 4 \bmod 45 \xrightarrow{y=x+2} y^2 \equiv 4 \bmod 45 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y^2 \equiv 4 \bmod 3^2 \ (2) \\ y^2 \equiv 4 \bmod 5 \ (1) \end{cases}$

Για την (1):

$y^2 \equiv 4 \bmod 5$ (4 ΤΥ $\Leftrightarrow 4^{\frac{5-1}{2}} \equiv 1 \bmod 5$ έχει λύση)

Προφανώς, $y \equiv 2 \bmod 5$ ή $y \equiv -2 \bmod 5 \equiv 3 \bmod 5$

Για την (2):

$y^2 \equiv 4 \bmod 3^2$ έχει λύση $\Leftarrow y^2 \equiv 4 \bmod 3$ έχει λύση

(1 ΤΥ $\Leftrightarrow 1^{\frac{3-1}{2}} \equiv 1 \bmod 3$ έχει λύση)

Πιο απλά: $y^2 \equiv 4 \bmod 3 \Rightarrow y^2 \equiv 1 \bmod 3$

$3 = 4\cdot 0+3 \Rightarrow 1^{0+1} \equiv 1 \bmod 3$. Λύση της εξίσωσης

Άρα, και το $-1 \bmod 3$ η άλλη λύση της.

$y \equiv 1 \bmod 3$ ή $y \equiv 2 \bmod 3$

$(1+3\cdot k)^2 \equiv 4 \bmod 3^2 \Rightarrow (1+6k+9k^2) \equiv 4 \bmod 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cdot 3k \equiv 3 \bmod 3^2 \Rightarrow 2k \equiv 1 \bmod 3 \Rightarrow k \equiv 2 \bmod 3$

Άρα, η μία λύση της $y^2 \equiv 4 \bmod 3^2$ είναι η εξής:

$y = (1+3\cdot 2) \bmod 3^2 \equiv 7 \bmod 9$

Επιλύουμε, το σύστημα

$y \equiv 2 \bmod 5$ || $(5,9)=1$ άρα έχει μοναδική λύση
$y \equiv 7 \bmod 9$ || Εφαρμόζοντας το Θ. του Κινέζου

• $\beta_1 \cdot \frac{[5,9]}{5} = \beta_1 \cdot 9 \equiv 1 \bmod 5$ (1)

$(5,9)=1 \Rightarrow 9 = 1\cdot 5+4 \Rightarrow 5 = 1\cdot 4+1$
$1 = 5-4 = 5-(9-5) = 2\cdot 5-9 \Rightarrow$
$\Rightarrow [1]_5 = [-1]_5 \odot [9]_5 \Rightarrow [1]_5 = [4]_5 \odot [9]_5$

(1): $9\cdot\beta_1 \equiv 1 \bmod 5 \Rightarrow \beta_1 \equiv 1\cdot 9^{-1} \bmod 5 \equiv 1\cdot 4 \bmod 5 \equiv 4 \bmod 5$

• $\beta_2 \cdot \frac{[5,9]}{9} = \beta_2 \cdot 5 \equiv 1 \bmod 9$ (2)

$(5,9)=1 \Rightarrow 1 = 2\cdot 5-9 \Rightarrow [1]_9 = [2]_9 \odot [5]_9$
(2): $5\cdot\beta_2 \equiv 1 \bmod 9 \Rightarrow \beta_2 \equiv 1\cdot 5^{-1} \bmod 9 \equiv 2 \bmod 9$

Άρα, έχουμε τη λύση του συστήματος.

$y \equiv (2\cdot 4\cdot 9+7\cdot 2\cdot 5) \bmod [5,9] \equiv 142 \bmod 45 \equiv 7 \bmod 45$

Έτσι, $x+2 \equiv 7 \bmod 45 \Rightarrow x \equiv 5 \bmod 45$

Τώρα, για την άλλη λύση της $y^2 \equiv 4 \bmod 3^2$
$(2+3k)^2 = (\cancel{4}+12k+9k^2) \equiv \cancel{4} \bmod 3^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 12k \equiv 0 \bmod 3^2 \Rightarrow 4k \equiv 0 \bmod 3 \Rightarrow k \equiv 0 \bmod 3$

Άρα, η άλλη λύση της $y^2 \equiv 4 \bmod 3^2$ είναι η εξής
$y \equiv (2+3\cdot 0) \bmod 3^2 \equiv 2 \bmod 9$.

Άρα, καλούμαστε να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y \equiv 3 \bmod 5 \\ y \equiv 2 \bmod 9 \end{cases}$$

|| $(5,9)=1$ άρα έχει μοναδική λύση εφαρμόζοντας το Θ. του Κινέζου

- $c_1 \cdot \frac{[5,9]}{5} = c_1 \cdot 9 \equiv 1 \bmod 5 \Rightarrow c_1 \equiv 4 \bmod 5$
- $c_2 \cdot \frac{[5,9]}{9} = c_2 \cdot 5 \equiv 1 \bmod 9 \Rightarrow c_2 \equiv 2 \bmod 9$

Άρα, έχουμε τη λύση του συστήματος

$$y \equiv (3\cdot 4\cdot 9 + 2\cdot 2\cdot 5) \bmod [5,9] \equiv 128 \bmod 45 \equiv 38 \bmod 45$$

Έτσι, $x+2 \equiv 38 \bmod 45 \Rightarrow x \equiv 36 \bmod 45$

Άρα, οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης είναι οι:

$x \equiv 5 \bmod 45$ και $x \equiv 36 \bmod 45$,

οι οποίες αν αντικατασταθούν επαληθεύουν την αρχική μας εξίσωση.